MAT497 Dönüşümler ve Geometriler 2. Quiz Sınav Cevap Anahtarı(09.01.2023)

1.) Afin dönüşümlerin kümesi $\mathcal{A}$ olmak üzere

$$A_1 \ldots \begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases},$$

ve

$$A_2 \ldots \begin{cases} x'' = A\,x' + B\,y' + M \\ y'' = C\,x' + D\,y' + N \end{cases}$$

iki afin dönüşüm olsun. A_2A_1 nin bir afin dönüşüm olduğunu gösteriniz(**50 P.**).

Çözüm: $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ için $A_2A_1 \in \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$A_2\,A_1 \ldots \begin{cases} x'' = A(ax + by + m) + B(cx + dy + n) + M \\ y'' = C(ax + by + m) + D(cx + dy + n) + N \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_2\,A_1 \ldots \begin{cases} x'' = \overbrace{(aA + cB)}^{a_1}x + \overbrace{(bA + dB)}^{b_1}y + \overbrace{(mA + nB + M)}^{m_1} \\ y'' = \underbrace{(aC + cD)}_{c_1}x + \underbrace{(bC + dD)}_{d_1}y + \underbrace{(mC + nD + N)}_{n_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_2\,A_1 \ldots \begin{cases} x'' = a_1x + b_1y + m_1 \\ y'' = c_1x + d_1y + n_1 \end{cases}$$

bulunur. Acaba $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \neq 0$ mıdır ?

$A_1 \in \mathcal{A}$ olduğundan $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,$

$A_2 \in \mathcal{A}$ olduğundan $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0$ dır.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1.d_1 - b_1.c_1 = (aA + cB)(bC + dD) - (bA + dB)(aC + cD)$

$\Rightarrow \Delta = abAC + adAD + bcBC + cdBD - abAC - bcAD - adBC - cdBD$

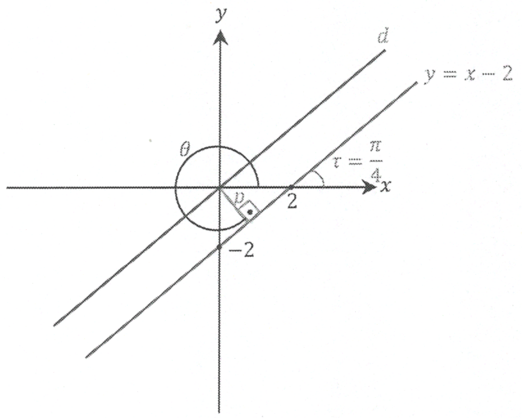
$\Rightarrow \Delta = ad(AD - BC) - bc(AD - BC)$

$\Rightarrow \Delta = \underbrace{(AD - BC)}_{\neq 0}\underbrace{(ad - bc)}_{\neq 0} \neq 0$

dır. O halde $A_2A_1 \in \mathcal{A}$ dır.

2.) $y = x - 2$ doğrusuna göre yansımanın denklemini bulunuz. Bu yansıma altında $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ geometrik şeklin resmini bulunuz(**50 P.**).

Çözüm: $y = x - 2 \Rightarrow tan\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{4}$ dir. $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ dir.



Not: (x_0, y_0) noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ dir.

$x - y - 2 = 0,\ (x_0, y_0) = (0,0)$ dan $a = 1, b = -1, c = -2,$

$p = \frac{|1.0+(-1).0-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ dir.

Orijinden geçmeyen herhangi bir doğruya göre yansıma denkleminin

$$R \ \cdots \begin{cases} x' = xcos2\tau + ysin2\tau + 2p.cos\theta \\ y' = xsin2\tau - ycos2\tau + 2p.sin\theta \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemde $\tau = \frac{\pi}{4}, p = \sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{4}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$R \ \cdots \begin{cases} x' = y + 2.\sqrt{2}.\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ y' = x + 2.\sqrt{2}.\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow R \ \cdots \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 2 \end{cases} \Rightarrow R^{-1} \ \cdots \ \begin{cases} x = y' + 2 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

bulunur.

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow (y' + 2 - 3)^2 + (x' - 2 - 1)^2 = 1$$
$$\Rightarrow (y' - 1)^2 + (x' - 3)^2 = 1$$

Not: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ çemberinin merkezi olan $(3,1)$ noktası $y = x - 2$ doğrusu üzerinde olduğundan bu çemberin resmi kendisidir.